第 38 講　整数問題 Part I

38　次の各問いに答えよ．

(1)　整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たしているとき，

(a)　a，b の少なくとも一方は偶数であることを示せ．

(b)　b が奇数のときには a が 4 の倍数であることを示せ．

(c)　a，b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ．

(2)　a と b は互いに素な自然数とする．このとき，$ax+by=1$ となる整数 x と y が存在することを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 38 講　整数問題 Part I

38　a，b は互いに素な自然数とし，m は $1 \leqq m < ab$ を満たす整数とするとき，$ax+by=m$ となる自然数 x と y は複数存在しないことを示せ．

　ただし，a，b が互いに素であるとき，$aj+bk=1$ を満たす整数 j，k が存在することを用いてよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 38 講　整数問題 Part I

38 次の各問いに答えよ．

(1) 整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たしているとき，

(a) a，b の少なくとも一方は偶数であることを示せ．

(b) b が奇数のときには a が 4 の倍数であることを示せ．

(c) a，b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ．

(2) a と b は互いに素な自然数とする．このとき，$ax+by=1$ となる整数 x と y が存在することを示せ．

【答】 略

【解答】

(1) k，l，m を整数とする．

(a) $a=2k+1$，$b=2l+1$ と仮定すると

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2=4(k^2+k+l^2+l)+2$$

となり，a^2+b^2 を 4 で割ったときの余りは 2 となる．

ここで $c=2m$ のとき $c^2=4m^2$，$c=2m+1$ のとき $c^2=4(m^2+m)+1$ となり，c^2 を 4 で割ったときの余りは 0 または 1 であるので，$a^2+b^2=c^2$ に矛盾する．

よって a と b の少なくとも一方は偶数である．

(b) (a)の結果と b が奇数より，a は偶数となる．よって，$a=2k$，$b=2l+1$ と表すことができ，このとき $a^2+b^2=(2k)^2+(2l+1)^2=4(k^2+l^2+l)+1$　ゆえに c^2 は奇数．よって c は奇数となるので $c=2m+1$ と表せる．

このとき $a^2+b^2=c^2$ より $4(k^2+l^2+l)+1=4m^2+4m+1$ となるので

$$k^2=m(m+1)-l(l+1)$$

を得る．

ここで m と $m+1$ は連続する 2 つの整数より，m と $m+1$ の少なくとも一方は偶数．よって $m(m+1)$ は偶数となり，同様に $l(l+1)$ も偶数．

したがって k^2 は偶数であるから，k は偶数．

ゆえに $a=2k$ は 4 の倍数となる．

(c) $(3k)^2=3\cdot3k^2$，$(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$，$(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$　より整数を 2 乗した数を 3 で割ると余りは 0 または 1 となり，余りが 0 となるのはその整数が 3 の倍数のときだけで，余りが 1 となるのはその整数が 3 の倍数でないときである．

a と b の両方が 3 で割り切れないとすると，上記より，a^2，b^2 のどちらも 3 で割ると余りが 1 となるので，a^2+b^2 を 3 で割ると余りは 2 となるが，c^2 を 3 で割ったときの余りは 0 または 1 であることより，これは $a^2+b^2=c^2$ に矛盾する．

よって a と b の少なくとも一方は 3 の倍数となる．

(2) $b\cdot1$，$b\cdot2$，$b\cdot3$，……，$b\cdot a$ について，これら a 個の数を a で割ったときの余りはすべて異なることを示すため，これらの中で a で割ったときの余りが等しいものが存在すると仮定する．つまり，整数 j，k に対して

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$1 \leqq j < k \leqq a \text{ かつ } bj = aQ_1 + r \text{ かつ } bk = aQ_2 + r$$

を満たす整数 Q_1，Q_2，r（0 以上 a 未満）があるとする．

このとき $bj = aQ_1 + r$ と $bk = aQ_2 + r$ の辺々の差をとると

$$b(j-k) = a(Q_1 - Q_2)$$

となるが，a と b は互いに素よりこの式は ab の倍数となる．つまり整数 l を用いて $b(j-k) = abl$ と表せる．ゆえに $j-k = al$ となる．

ここで $1 \leqq j < k \leqq a$ より $-a < j-k < 0$ となるので，$j-k = al$ となる整数 l が存在しない．

よって $b \times 1$，$b \times 2$，……，$b \times a$ を a で割った余りはすべて異なるので，$bj = aQ + 1$ となる整数 j，Q が存在することになる．

$bj = aQ + 1$ より $a \times (-Q) + bj = 1$ であるから，$ax + by = 1$ となる整数 x と y が存在することが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第38講　整数問題 Part I

38　a，b は互いに素な自然数とし，m は $1 \leqq m < ab$ を満たす整数とするとき，$ax+by=m$ となる自然数 x と y は複数存在しないことを示せ．

ただし，a，b が互いに素であるとき，$aj+bk=1$ を満たす整数 j，k が存在することを用いてよい．

【答】 略

【解答】

a，b が互いに素であるとき，$aj+bk=1$ を満たす整数 j，k が存在するので $ajm+bkm=m$ を得る．ここで, $ax+by=m$ となる自然数 x と y が存在した場合, この式と $ajm+bkm=m$ の辺々の差をとると，$a(x-jm)+b(y-km)=0$

すなわち $a(x-jm)=b(-y+km)$ となる．

ここで，$x-jm$ と $-y+km$ は整数で a，b は互いに素であるので，この式は ab の倍数，つまり整数 l を用いて $a(x-jm)=b(-y+km)=abl$ と表せる．

よって $(x,\ y)=(bl+jm,\ -al+km)$ を得る．

このとき，x と y が自然数ならば $bl+jm>0$ かつ $-al+km>0$ となるが，これらより

$-\dfrac{jm}{b}<l<\dfrac{km}{a}$ を得る．

ここで，$\dfrac{km}{a}-\left(-\dfrac{jm}{b}\right)=\dfrac{m(aj+bk)}{ab}=\dfrac{m}{ab}<1$ となるので，$-\dfrac{jm}{b}<l<\dfrac{km}{a}$ を満たす整数 l は多くとも1つしか存在しない．

よって $ax+by=m$ となる自然数 x と y は複数存在しないことが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。